簡単な 相加平均 相乗平均 不等式の一般的証明

「算術平均 幾何平均 不等式」

定理 (算術平均 幾何平均の不等式)　$a_i > 0 : i \in \{1, 2, ..., n\}$, $n \geq 2$ [*1] とするとき次の不等式が成り立つ

$$a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n \;\geq\; n\, a_1 a_2 \cdots a_n$$

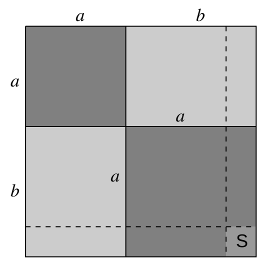
等号の成り立つ条件 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ は $n = 2$ の場合から継承されるので $n = 2$ を除いて精査しない.
この定理は一般的には同等な $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n \;\geq\; \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ の形で述べられることが多い.

補題　$n = 2$ で定理は正しい.

証明　濃く塗りつぶした領域の面積 $(a^2 + b^2)$ は灰色の領域の面積 $(2ab)$ より領域 S の面積 (S) 大きい. 従って

$$a^2 + b^2 \geq 2\,ab$$

等号は $S = 0$ つまり $a = b$ の場合である.　■



$a \leq b$ とした

まずいくつかの補題を証明する.

補題１　n で定理が正しいなら n 以下の $k \leq n$ でも定理は正しい.

証明　まず定理が n で正しいなら $n-1$ でも正しいことが次の不等式から導かれる

$$a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \cdots + a_{n-1}^{n-1} + a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \geq \; n(a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^{\frac{n-1}{n}} (a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n}} = n\, a_1 \cdots a_{n-1}$$

等号は n で全てが等しい場合から $n-1$ でも同じ場合. この操作を繰り返せば題意が証明される.　■

補題２　定理は $n = 2^k$, $k > 0$ で正しい.

証明　まず定理が n で正しいならその 2 倍 $2n$ でも正しいことが次のように示される

$$a_1^{2n} + \cdots + a_n^{2n} + a_{n+1}^{2n} + \cdots + a_{2n}^{2n} \geq n\, a_1^2 \cdots a_n^2 + n\, a_{n+1}^2 \cdots a_{2n}^2 \;\; \geq 2n\, a_1 a_2 \cdots a_{2n}$$

$n = 2$ では定理が成り立つことから $n = 2^k$, $k > 0$ で定理が正しいことが示される. 等号は $n = 2$ の場合から継承されて全てが等しい時である.　■

補題３　任意の自然数 n に対して $n < 2^n$ が成り立つ.

証明　ほとんど自明であろう. もし証明するなら帰納法でもよいが[*2]、直接次のようにも証明できる.

$$n = \overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{n} \leq 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1 < 2^n$$　■

定理の証明　与えられた任意の n に対して補題２より定理は 2^n で成り立つ. 補題３と補題１ から定理は n で成り立つ. 等号は $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ の場合である.　□

[*1] $n = 1$ の場合の定理に意味はない

[*2] $1 < 2^1$.　$n < 2^n \Longrightarrow n + 1 \leq n + n < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$

別証明

証明 $n-1$ 以下の自然数で定理が成り立つと仮定する．n でも定理が成り立つことを n が偶数の場合と奇数の場合で分けて考える．

偶数 $n=2m$ **：**

$$\begin{aligned}\overbrace{a_1^{2m}+a_2^{2m}+\cdots+a_m^{2m}}^{m} + \overbrace{a_{m+1}^{2m}+a_{m+2}^{2m}+\cdots a_{2m}^{2m}}^{m} &\\ \geq m\,a_1^2a_2^2\cdots a_m^2 + m\,a_{m+1}^2a_{m+2}^2\cdots a_{2m}^2 &\\ \geq 2m\,a_1a_2\,\cdots\,a_{2m} &\end{aligned}$$

よって n でも定理が成り立つ．

奇数 $n=2m-1$ **：**　ここで新しい変数 $b_i : i=1,2,...,2m$ を次のように定義する

$$b_1^{2m}\equiv a_1^n,\ b_2^{2m}\equiv a_2^n,\ \ldots, b_{2m-1}^{2m}\equiv a_n^n,\ b_{2m}^{2m}\equiv a_1a_2\cdots a_n$$

すると $\{b_i\}$ に対して偶数の場合が適用できる $(m<n-1$ である$)$．従って

$$b_1^{2m}+b_2^{2m}+\,\cdots\,+b_{2m}^{2m}\ \geq 2m\,b_1b_2\cdots b_{2m}$$

が成り立つ．元の $\{a_i\}$ に戻して表すと

$$a_1^n+a_2^n+\,\cdots\,+a_n^n+a_1a_2\cdots a_n\geq(n+1)\,a_1a_2\cdots a_n$$

となりこの場合にも定理が成り立つ． □

本当のところ、この証明でもよいですが、場合分けをしない初めの証明の方が私は好きですがいかがでしょう．

証明に至るいきさつ

何故、古色蒼然たる算術 (相加) 平均 幾何 (相乗) 平均の不等式を証明しようと考えたのかの経緯を述べよう. それは（とある）数学問題集を立ち読みしていたところ『鋭角三角形の頂角を α, β, γ とするとき $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma$ の最小値を求めよ』という問題を見つけたことに理由があります (本屋から帰宅した段階で鋭角条件を忘れていました). 対称性から正三角形がその値を与えるのではと想像できましたがその証明を考えた中で三角形で成り立つ関係式 $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$ をたまたま発見しました (知らなかったですが有名なもののようです).

発見過程は $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ からその tan を取り加法定理を 2 度適用することを思いつけばよいのですが、それをいつ思いついたかはハッキリしません. 立ち読みで鋭角三角形という条件を忘れていて、鈍角三角形の場合などを考えていてたまたまやってみたのでは無いかと思います. 発見過程と言う程では無いですが、思いつく過程はハッキリしないことが多いと思います.

これと $n = 3$ の場合の相加平均と相乗平均の不等式から正三角形が求める解であることが容易に証明できます. そして $n = 3$ の場合の証明を考えたのが切っ掛けでした.

その後どうせならと一般の n 場合の証明に取り掛かり解析的証明を思いついたが、大げさで又ずるいと考えて代数的な証明で考え直しました. 解析的証明は以前見たことが有るような気もしますが、それと同じかどうかは分かりません.

ここで与えた補題 1 を用いた代数的証明は短くて結構スマートと思うのですがいかがでしょう. $n = 2$ ケースの幾何学的証明は調べてはいませんが何処かにありそうです.

始めに思い付いた証明

まず思いついたのは偶数に関しては $n = 2$ の結果を繰り返せば証明できそうだと考えました. 後は帰納法でできそうに感じて次のような証明を考えつきました. $k \geq 1$ として $n \leq 2k$ なる n に関して 算術平均 $\geq$ 幾何平均 が成り立つと仮定する. そのとき $n \leq 2(k+1)$ の場合でも成立することを帰納法で証明しよう ($k = 1$ の場合は証明済みである).

まず $n = 2(k+1)$, $k \geq 1$ で成立すること[*3]は次のように証明できる ($k + 1 \leq 2k$, $k \geq 1$ である).

$$
\begin{aligned}
\left(a_1^{2(k+1)} + \cdots + a_{k+1}^{2(k+1)}\right) + \left(a_{k+2}^{2(k+1)} + \cdots a_{2(k+1)}^{2(k+1)}\right) &\geq (k+1)\, a_1^2 \cdots a_{k+1}^2 + (k+1)\, a_{k+2}^2 \cdots a_{2(k+1)}^2 \\
&\geq 2(k+1)\, a_1 a_2 \cdots a_{2(k+1)}
\end{aligned}
$$

次に $n = 2k + 1$ の場合でも関係式が成り立つことは $n = 2(k+1)$ の結果と補題 1 の証明中の関係式から証明できる. $\square$

証明の論旨は

$$2 \hookrightarrow 4 \searrow 3 \hookrightarrow 6 \searrow 5 \hookrightarrow 8 \searrow 7 \hookrightarrow 10 \searrow 9 \hookrightarrow 12 \searrow 11 \hookrightarrow \cdots$$

$\hookrightarrow$ は右の数の半分の数の結果を用いて証明されることを表し、$\searrow$ は 1 つ前の

補題 1 は奇数の場合を証明するために次数が同じで対称性を満たす項として $a_1 a_2 \cdots a_n$ を見いだしたことによります.

[*3] i.e. $n = 2k + 2, 2k + 1$ で成り立つこと

中高生向けの問題

1. なぜ $2^n - 1 < 2^n$ なのですか
2. 次の 2 項展開を用いて $n < 2^n$ を証明しなさい
$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$
3. $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \ \geq\ 4abcd$ を証明し、等号が成り立つ条件を求めなさい
4. $a^3 + b^3 + c^3 \ \geq 3\,abc$ を $n = 4$ の結果を利用して証明し、また等号が成り立つ条件を求めなさい
5. 三角形の 3 つの角度が α, β, γ のとき $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma \ = \ \tan\alpha\,\tan\beta\,\tan\gamma$ を証明しなさい. この結果を用いて鋭角三角形に関して $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma$ の最小値を求めなさい。もし鋭角という条件を外すと結果はどうなりますか.
6. 帰納法で
$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$$
を次のように証明した. n で正しいとすると
$$S_{n+1} = 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n-1)(n+2)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1-1)(n+1+2)}{2}$$
で $n+1$ でも成り立つ. したがって全ての n で成り立つ. ■
この証明をどう思いますか.