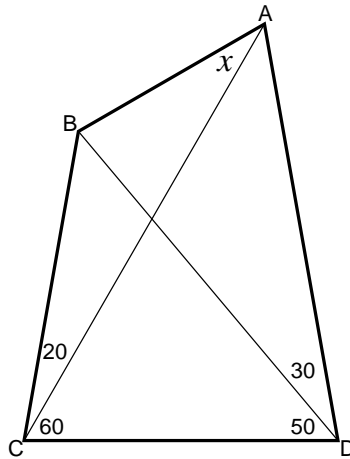
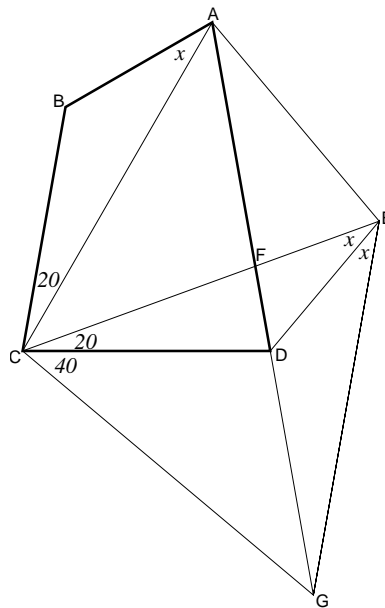


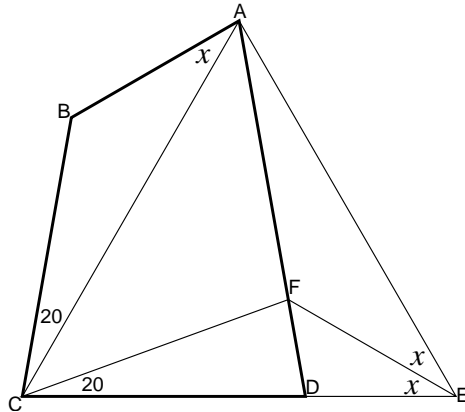
ラングラー 幾何問題



ラングラー幾何問題：角 x を求めよ
 明らかに $\angle CAD = 40^\circ, \angle CBD = 50^\circ$ である

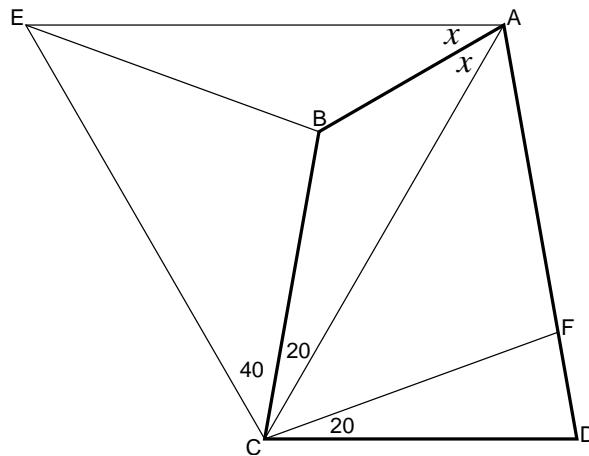


証明1：E点を $AC=EC, \angle ACE = 40^\circ$ と取る。そのとき $CF=FA$ となる。また $FC=CD$ となる。次にG点をAFの延長線上で $DCG = 40^\circ$ と取る。 $\triangle ACF \cong \triangle GCD$ となるので $CE=CG$ となる。よって $\triangle ECG$ は正三角形となる。また $\triangle CAB \cong \triangle CED \cong \triangle GED$ となるので、 $x = 60^\circ/2 = 30^\circ$ である 答え $x = 30^\circ$
 (2017-12-01 ~ 2017-12-9)



証明 2 : $AC=CE$ と取ると $\triangle ACE$ は正三角形となる. $\angle FCE = 20^\circ$ と取ると $CF=AF$ となる. $CB=CD=CF=AF$ であることに注意すると $\triangle CBA \equiv \triangle CFE \equiv \triangle AFE$ となる. $x = \angle AEC/2 = 60^\circ/2 = 30^\circ$ (2017-12-13 ~ 14) 証明 2 の解答の方がスマートかと思う

3 番目の証明を考えてみた



証明 3 : $AC=CE$, $\angle BCE = 40^\circ$ と取ると $\triangle ACE$ は正三角形となる. $\angle ACF = 40^\circ$ と取ると $CF=AF$ となる. $CB=CD=CF=AF$ であることに注意すると $\triangle AFC \equiv \triangle EBC$ となる. 従って $\triangle ABE \equiv \triangle ABC$ となる. よって $x = \angle EAC/2 = 60^\circ/2 = 30^\circ$ (2018-02-23)

1 計算からは

$\triangle ABC$ を考えることから

$$\sin x = \frac{\sin 40}{\sin 80} \sin(160 - x)$$

が得られる. これを変形すると

$$\sin x \sin 80 = \sin 40 \sin(x + 20) \tag{1}$$

さらに変形して

$$2 \sin x \cos 40 = \sin(x + 20)$$

さらに、明らかな関係 $40 = 60 - 20$ に着目すれば *1

$$2 \sin x \cos(60 - 20) = \sin(x + 20)$$

となるので

$$\sqrt{3} \sin x = \cos x$$

が得られる。つまり

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

よって $x = 30^\circ$ となる。

[2018-02-17]

次のように考えると必然かも知れない

$$2 \sin x \cos 40 = \sin(x + 20)$$

は

$$2 \sin x \sin 50 = \sin(x + 20)$$

と変形されるので

$$2 \sin x \sin(30 + 20) = \sin(x + 20)$$

と変形したくなる筈。さらに

$$2 \sin x = \frac{\sin(x + 20)}{\sin(30 + 20)}$$

の変形も必然で、 $x = 30^\circ$ を代入したくなる誘惑には勝てないだろう。

[2018-07-23]

2 物理的には

と問えば、取り敢えず近似解であろうと答えが求められれば良いので、(1) 式から例えば C 言語で次のようにコーディングすれば良いだろう (2018-07-23)

1. #define d2r (3.141592653/180)
2. #define Cos(x) (cos(x*d2r))
3. #define Sin(x) (sin(x*d2r))
4. #define Atan(x) (atan(x)/d2r)
5. void main(void){ cout << Atan(Sin(20)/(2*Cos(40)-Cos(20))) << endl; }

実行した結果は 30 となる。物理的には $x = 30$ と結論して良さそうである。物理学では 8 桁一致すれば等しいとみなして良いのではないと思われる。勿論これは証明とは言えないが。

閑話 1970 年代に Einstein 方程式の厳密解で 佐藤・富松解 という物理的にはほとんど意味の無い、いわゆる裸の特異点が現れるので、解が発見されたが、その発見過程でコンピュータを用いた数値計算で計算結果が特定の値に収束？したことから、厳密解が存在するのではないかと考えて発見したという話がありました。

*1 この関係に気が付くかどうか証明の肝であるが、私自身なかなか思いつかなかった。 $80 = 60 + 20$ などいろいろあるが、うまくいかないみたいである。