初心者向けの相対性理論入門

菱 川[*1]

1　はじめに

知らない言葉を覚えるたびに 僕らは大人に近くなる

多くの解説書では、Lorentz 変換を導き出す方法として次のものを採用している。まず空間の一様性により、変換が線形変換になることを導き、さらに光速度不変の原理および相対性原理を用いることにより、その変換係数を決定する。

この方法は理学部の学生にとっては理解しやすい方法であろうが、いかにも数学的な方法であり、文系学生にとっては難しい。文科系の学生にとっては線形変換の概念および一様性から線形変換を導き出す部分そのものが馴染みの薄いものである。できることなら、物差しと時計を光の信号で絡めた実験方法で、素直に Lorentz 変換を導き出せるならその手法の方が相応しいのではないかと思う。また**中高生向け**としても、この手法は最良ではなかろうか。

本稿では、三つの思考実験を用いて直接に Lorentz 変換を導き出してみる。この過程で必要になるのは、式を変形していくことだけであり、式の変化そのものを順に辿っていくならば無理なく Lorentz 変換に到達できる。

Einstein の原論文[*2]に倣い、**光速度不変の原理**および**相対性原理**を仮定する。また空間の一様等方性を前提条件として仮定することにする。各点にある時計の合わせ方も原論文の手法を継承することにする。

静止系と名付けられた (慣性) 系に対して一定の速度 V で運動している運動系 (と呼ばれる系) を考えることにする。

運動系に静止し、その運動方向に垂直な物差しと運動系の原点からでる光を考えピタゴラスの定理を用いることで両系における時間経過の関係式

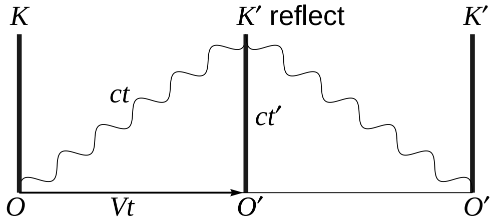

図 1　静止系から見た、運動系に固定された棒に沿って伝搬する光の経路

が得られる (図 1)。

$$t' = t\sqrt{1 - V^2/c^2} \tag{1}$$

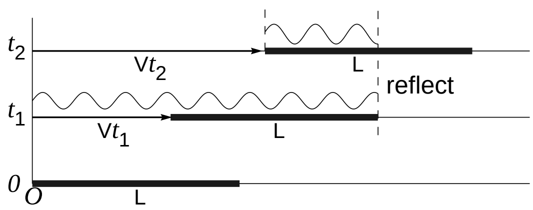

図 2　運動方向の棒の長さを測定する

また運動系の運動方向に平行に置かれた物差しを考察する。棒の左端が運動系の原点に一致しているものとする。運動系で測定した棒の長さを L' としその棒を光が往復するのに要する時間を t'_2 とすると、明らかに $ct'_2 = 2L'$ である。この事象を静止系で観測したものが図 2 であるが、これより光が棒の左端に戻ってくる時刻を t_2 とすると、$t_2 = 2cL/(c^2 - V^2)$ が導かれる。なぜなら時刻 t_1 での原点から反射鏡までの距離から $Vt_1 + L = ct_1$ が得られ又時刻 t_2 での原点から棒の左端までの距離から $Vt_2 = ct_1 - c(t_2 - t_1)$ が得られる。これより求める式が得られる。

また t_2 と t'_2 の間には K, K' 系の原点にある時計の時刻の関係式 (1) が成立する。これより Lorentz 収縮の関係式

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{2}$$

が導かれる。次章ではこの二つの関係式を使用して本題の Lorentz 変換式を導く。

[*1] 大学の物理教育 2003-3 号に加筆、変更を加えました
[*2] A. アインシュタイン (内山龍雄訳・解説)『相対性理論』岩波文庫 (1988)

2 Lorentz 変換公式

任意の位置と時刻で発生した事象の間の関係式を求めるためには座標の概念が必要となる。ここでは物差しが組み合わされた格子の各点に合わされた時計が設置されたものを用いる。

ここで二つの観測者 $\mathcal{K}$ と $\mathcal{K}'$ を考える。この観測者はどちらの時計で測定しても時刻 0 に原点、及び x, y, z 方向が一致していたものとする。さらに観測者 $\mathcal{K}'$ は $\mathcal{K}$ の x 方向に一定速度 V で運動しているものとする。

目的の Lorentz 変換公式は **x 方向に進行してきた光が $\mathcal{K}$ 系で時刻 t に位置 x に到達した**という事象 (図 3) を考えるだけで容易に導かれることを以下で示そう。同じ事象を $\mathcal{K}'$ で観測したときには、光が時刻 t' に位置 x' に到達したものとしよう。また、光が $\mathcal{K}'$ 系の原点を通過した瞬間の時刻を $\mathcal{K}'$ 系では t'_0、$\mathcal{K}$ 系では t_0 であったとする。

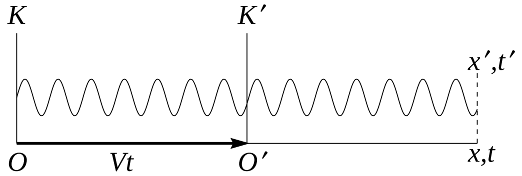

図 3　光が x に到達した事象

運動方向の長さ x' の物差しは $\mathcal{K}$ 系では 図 3 から $(x - Vt)$ の長さに観測される。これらの間には Lorentz 収縮の関係式 (2) が成り立つので x **座標**に対する次の座標変換の関係式となる。

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{3}$$

次に光が x に到達した瞬間を $\mathcal{K}'$ 系で考えると光が $\mathcal{K}'$ 系の原点から x' に到達するのに要した時間と光の速度を用いて次の関係式を得る。

$$c(t' - t'_0) = x' \tag{4}$$

同じ事象を $\mathcal{K}$ 系で考えると、$\mathcal{K}'$ 系の原点を光が通過した瞬間から x に到達するまでに要した時間を用いて次の関係式が導かれる。

$$c(t - t_0) = x - Vt_0 \tag{5}$$

t_0 と t'_0 の間には原点にある時計同士の関係式 (1)

$$t'_0 = t_0\sqrt{1 - V^2/c^2} \tag{6}$$

が成立する。(4) 式の右辺にある x' に (3) 式を代入し、(5), (6) 式を使用し t'_0 を x, t で表せば、対応する位置における運動系 $\mathcal{K}'$ の時刻 t' と静止系 $\mathcal{K}$ の時刻 t の間の**時間座標**に関する次の変換公式が求められる。

$$t' = \frac{t - (Vx/c^2)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{7}$$

運動方向と直角な空間座標成分の値が不変であることも含めて結果を纏めれば、よく知られた Lorentz 変換公式が導かれる。

3 まとめ

理学部以外の文学部の学生にも一度は相対性理論から導かれる一見奇妙に見える結論をその雰囲気なりとも味わってもらえたらと考え、特殊相対性理論の Lorentz 変換公式を導き出した。

用いたのは精精ピタゴラスの定理、これは最も一般に知られた定理とも言われている、のみであり、高等な数学を必要とはしない。しかしながら、式を全く使用せずに言葉のみを用いて真の説明ができるとは考えられない。その時、物理学科向けの教科書にある方法は文系学部の学生にはやはり難しいのではないかとおもう。本論では三つの思考実験を用いた素直な議論から Lorentz 変換を導き出してみた。Lorentz 変換式さえ導けば例えば相対論的な速度の合成法則は割り算のみで導くことができる。

ここで行った議論の目的は相対性理論を理解するために必要な敷居は、文系の学生にとってそれほど高いものではないことを理解してもらうことであった。

けれど最後まで 覚えられない言葉もきっとある 『命の別名』N.M.

常識とは 18 歳までに身につけた偏見のことである A.E.

4　おまけ

速度の変換公式を導いてみよう。静止系で時間間隔 Δt での物体の x 位置が Δx 移動したとするとその速度は $u = \Delta x / \Delta t$ である。 これを運動系で考えると時間と位置の変化を $\Delta t', \Delta x'$ とすれば $u' = \Delta x' / \Delta t'$ であるので (3),(7) 式を用いて

$$u' = \frac{u - V}{1 - \frac{Vu}{c^2}}$$

もし $u = c =$ 光速度 とすると $u' = c$ となり光速度そのものとなる。つまり光速度は運動している観測者から測定しても同じ値であることが分かる (光速度不変)。

また $c - u'$ を計算すると

$$c - u' = \frac{(c+V)(c-u)}{c(1 - \frac{uV}{c^2})}$$

となり、もし静止系での物体の運動速度 u が光速度 c より小さいなら $c - u' > 0$ となるので運動している観測者にとってもその速度は光速度を超えることはないことが分かる。

次に静止系の時計の進みと運動系で静止している時計の進みを比べてみよう。運動系の原点にある時計の進み $\Delta t'$ と静止系の時計の進み Δt の関係は (1) 式で与えられるので

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \;\leq\; \Delta t$$

である。つまり運動系が光速度の 90% で運動しているとすると静止系で $\Delta t = 1$ 秒経ったすると運動している観測者にとっては 0.43 秒しか経っていない。もし光速度の 99.9% で運動するなら 0.045 秒になる。これはよく運動すると時計は遅く進むと言われるものです。例えば静止系 (地球上) での 100 年は光速度の 99.9% で運動する浦島ロケットでは 4 年半しか経っていないことになります。

次に運動している棒の長さを測ってみよう。静止系で同時刻に棒の両端の位置を求めると (3) 式で t を固定して両端の座標の差が静止系で測った棒の長さとなる。

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

である。左辺は棒と一緒に運動している系で測った棒の長さ L' で有り、右辺は運動している棒を静止している系で測った棒の長さ L とは

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

の関係にあることを表している。これは次の様に表した方が分かりやすい。

$$L = L' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

これは次のように解釈できる。運動している系で測った棒の長さが棒本来の長さ (固有長さと呼ばれる) であり、それを外から測った長さは運動している棒の長さをそれをみている系で測った長さである。つまり運動している棒の運動方向の長さは短く観測されることを表している。

では球状の物体が運動すると運動方向に圧縮されて楕円体に見えるかというと、実は光の到達時間を考慮すると運動してもやはり球形に見えることが示される。これはそれほど古い発見ではありません。